

Vlastnosti kombinačních čísel

KOMBINAČNÍ ČÍSLO $\binom{n}{k}$ je definováno pro $n \geq k$, $n, k \in N_0$ takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad (\text{př.}) \quad \binom{6}{2} = \left[\frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} \right] = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

VLASTNOSTI

$$1. \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

důkaz:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1 & \binom{0}{0} &= \frac{0!}{(0-0)! \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 & \binom{n}{1} &= \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = n \end{aligned}$$

$$2. \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (\text{př.}) \quad \binom{20}{17} = \binom{20}{20-17} = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

důkaz: $P = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = L$

$$3. \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

důkaz:
$$L = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{\frac{(n-k)! \cdot k!}{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot k!}} + \frac{n!}{\frac{[n-(k+1)]! \cdot (k+1)!}{(n-k-1)! \cdot (k+1) \cdot k!}} =$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

společný jmenovatel

$$P = \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{[n+1-(k+1)]! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \quad L = P$$

Příklady

① Výhodně vypočítejte s využitím vlastností kombinačních čísel

$$a) \binom{20}{18} = \binom{20}{20-18} = \binom{20}{2} = \left[\frac{20!}{(20-2)! \cdot 2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18! \cdot 2 \cdot 1} \right] = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190 \quad \left[\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \right]$$

$$b) \binom{20}{18} + \binom{20}{19} = \binom{21}{19} = \binom{21}{2} = \frac{21 \cdot 20}{2 \cdot 1} = 210 \quad \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \right]$$

$$c) \binom{12}{3} + \binom{4}{3} - \binom{12}{9} = \binom{12}{3} + \binom{4}{3} - \binom{12}{3} = \binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$$

Uvedené vlastnosti kombinačních čísel lze ilustrovat na následujícím schématu nazývaném Pascalův Δ .

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

$\binom{0}{0}$	$n = 0$	1
$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$	$n = 1$	1 1
$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$	$n = 2$	1 2 1
$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$	$n = 3$	1 3 3 1
$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$	$n = 4$	1 4 6 4 1
$\binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$	$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$\binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}$	$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
.....		
$\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \dots \binom{n}{n-2} \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$		

- symetrické rozmístění stejných čísel $\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\left[\binom{4}{1} = \binom{4}{4-1} = \binom{4}{3} \right]$

- součet 2 sousedních čísel je roven číslu v následujícím řádku „pod jejich středem“ $\Rightarrow$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \left[\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = \binom{6}{2} \right]$$

- součet čísel po diagonále $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n+1}$ atd. $\left[\binom{4}{4} + \binom{5}{4} = \binom{6}{5} \right]$

Příklady

② Vyjádřete jediným kombinačním číslem **Typ stejné řádky [číslo „nahore“ udává řádek]**

$$a) \binom{16}{4} + \binom{16}{5} = \binom{17}{5}$$

$$b) \binom{13}{2} + \binom{13}{10} = \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = \binom{14}{3}$$

③ Vyjádřete jediným kombinačním číslem **Typ diagonála $\Rightarrow$ upravit na předchozí typ.**

$$a) \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \left[\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1} \right]$$

$$= \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5} = \binom{9}{4}$$

$$b) \binom{10}{10} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} = \binom{11}{11} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} =$$

$$= \binom{12}{11} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} = \binom{13}{11} + \binom{13}{10} = \binom{14}{11} = \binom{14}{3}$$

$$c) \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{19}{2} + \binom{20}{2} = \binom{21}{3} \quad \left[\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} = \binom{n+3}{n+1} \text{ atd.} \right]$$